



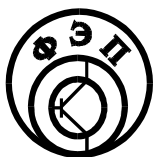
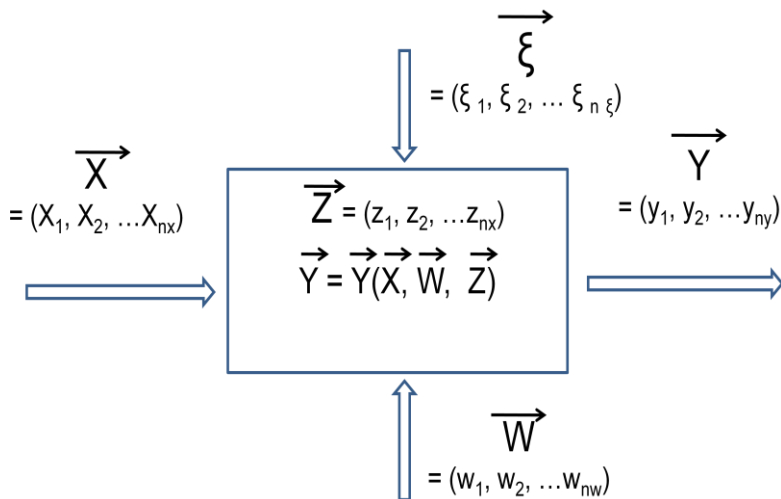
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
 РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
 ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
 Технологический институт  
 Федерального государственного образовательного  
 учреждения высшего профессионального образования  
 «Южный федеральный университет»

**Блинов Ю.Ф., Иванцов В.В., Серба П.В.**

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть I

Электронное учебное пособие



Таганрог 2012



УДК 518.5.001.57(07.07)

Блинов Ю.Ф., Иванцов В.В., Серба П.В. Методы математического моделирования. Ч.1. Электронное учебное пособие. Таганрог, ТТИ ЮФУ, 2012. – 42 с.

Электронное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы по изучению курса «Специальные разделы математики (методы математического моделирования)». Для направлений подготовки бакалавров 210100, 211000, 222900. В 1 части учебного пособия рассматриваются общеметодологические вопросы моделирования, терминология в области моделирования, классификация моделей, системный подход к моделированию, вопросы применения математических моделей. В конце учебного пособия приводится тест для самопроверки.

Поставляется на 1 CD-ROMe и может использоваться в локальном или сетевом режиме. Минимальные системные требования: любой PC, RAM от 1 Мб, память на жестком диске от 1 Мб, операционная система от Windows XP и старше, Acrobat Reader или другой браузер PDF-файлов любой версии.

© Ю.Ф. Блинов, В.В. Иванцов, П.В. Серба, 2012



## Оглавление

Введение .....	4
Глоссарий .....	6
Модуль I. Общеметодологические вопросы моделирования .....	7
1.1. Метод моделирования .....	7
1.2. Системный подход к моделированию .....	9
1.3. Классификация моделей .....	13
1.3.1. Виды моделей .....	13
1.3.2. Физические (материальные) модели .....	14
1.3.3. Информационные (символьные) модели .....	15
1.4. Классификация математических моделей .....	17
1.5. Взаимодействие объекта моделирования со средой .....	22
1.6. Свойства математических моделей и требования к ним .....	25
1.7. Разработка математических моделей .....	34
1.8. Применение математических моделей .....	35
1.9. Вычислительный эксперимент .....	36
1.10. Тест для самопроверки .....	39
Литература .....	41
Сведения об авторах .....	42



## Введение

Большинство задач инженерной деятельности человека связано с построением и использованием математических моделей. Теоретические основы, необходимые для изучения методов математического моделирования, закладываются при изучении дисциплины «Математика». Курс «Математическое моделирование» предполагает изучение специальных прикладных разделов математики, посвященных разработке математических моделей технических объектов и процессов. Курс состоит из пяти модулей.

Модуль «Общеметодологические вопросы моделирования» посвящен изучению терминологии по дисциплине, классификации моделей, системного подхода к моделированию, свойств моделей и требований к ним, общих вопросов разработки и применения математических моделей.

В модуле «Выборочный анализ результатов натурных и вычислительных экспериментов» изучаются основы математической статистики, при этом происходит частичное повторение под практическим углом материала, изучаемого в курсе математики.

Модуль «Статистическое моделирование» посвящен методам разработки математических моделей на основе статистической обработки экспериментальных данных,



изучаются основы планирования экспериментов, корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа.

В модуле «Методы оптимизации» рассматриваются основы классических и поисковых методов отыскания минимальных и максимальных значений целевой функции.

В модуле «Имитационное моделирование и метод Монте-Карло» рассматриваются методы генерации и использования псевдослучайных чисел при решении задач инженерного проектирования.

В настоящем учебном пособии рассматривается модуль «Общеметодологические вопросы моделирования». В конце пособия приведен краткий тест для самопроверки.

В качестве навигационных инструментов для гиперссылок в учебном пособии использованы кнопки:



– в начало;



– глоссарий;



– оглавление;



– в конец.

Для обеспечения правильной работы гиперссылок в PDF-браузере рекомендуется установить постраничный режим просмотра.



## Глоссарий

Аналогия, Гипотеза, Декомпозиция, Дерево целей,  
Информационность, Композиция, Математическая аналогия,  
Метод моделирования, Метод Монте-Карло, Модель,  
Подсистема, Поисковые методы оптимизации,  
Прогнозирование, Система, Системный подход, Структурный  
подход, Функциональный подход, Элемент, Эмергентность.

**Модели:** Аналитические, Аналоговые, Вербальные,  
Графические, Детерминированные, Динамические, Дискретные,  
Комбинированные, Концептуальные, Линейные, Масштабные,  
Математические, Многомерные, Нелинейные, Непрерывные,  
Нестационарные, Одномерные, Подобные, С распределенными  
параметрами, С сосредоточенными параметрами,  
Статистические, Статические, Стационарные, Стохастические.

**Параметры:** Входные, Возмущающие, Выходные,  
Состояния, Управляющие.

**Свойства моделей:** Адаптивность, Адекватность,  
Непротиворечивость, Простота, Реалистичность, Точность,  
Универсальность, Устойчивость, Целенаправленность,  
Экономичность.



## МОДУЛЬ I. ОБЩЕМЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Цель модуля:* создание методологической базы для разработки и использования математических моделей; освоение методологии математического моделирования на концептуальном уровне; знакомство с терминами и определениями.

*В результате изучения модуля студент должен:*

*знать* классификацию моделей;

*уметь* формулировать требования к разрабатываемым математическим моделям;

*владеть* терминологией в области моделирования.

### 1.1. Метод моделирования

При познании окружающего мира человек имеет дело не непосредственно с реальными объектами, а с их образами, сформированными с помощью органов чувств, измерительных приборов, аналитического оборудования, оргтехники и абстрактного мышления.

Все предметы, явления, процессы окружающего мира, на которые направлена человеческая деятельность, называются объектами. Объекты материального мира существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой. Познание осуществляется посредством ощущений,



которые создают в нашем сознании образы материальных объектов.

Объекты материального мира сложны и многообразны. Отражение всех их свойств в создаваемых, изучаемых и используемых образах весьма затруднительно, да и не нужно. Важно, чтобы образ объекта содержал черты, наиболее важные для его использования.

*Методом моделирования называется замена объекта-оригинала объектом-заместителем, обладающим определенным сходством с оригиналом, с целью получения новой информации об оригинале.*

*Моделью называется объект-заместитель объекта-оригинала, предназначенный для получения информации об оригинале.*

Наиболее важными свойствами моделей являются: сходство с оригиналом в важных для изучения чертах, простота разработки и использования, удобство изучения.

Методологическими основами построения моделей являются гипотезы и аналогии.

*Гипотезой называется обоснованное предположение, выдвигаемое с целью выяснения свойств и причин исследуемых явлений.* Гипотеза подлежит проверке. Проверка гипотезы, как правило, производится на основании сравнения ее положений с экспериментом. При построении моделей гипотезы часто формулируются на основе аналогий.





*Аналогией называется сходство нетождественных объектов в некоторых сторонах, качествах, отношениях.*

Например, колебания математического маятника и электрические колебания в колебательном контуре сходны по их математическому описанию. *Сходство математических описаний объектов называется математической аналогией.*

Обнаружив аналогию в некоторых свойствах двух объектов, можно предположить (сформулировать гипотезу), что аналогия наблюдается и в других свойствах, и что один из объектов можно использовать в качестве модели другого. Далее, сформулированная гипотеза подлежит экспериментальной проверке. Если в результате проверки гипотеза отвергается, выделяется новая гипотеза. Если экспериментальные данные не противоречат гипотезе, это еще не значит, что она на 100% верна, возможно, она будет отвергнута в будущем. На основании эксперимента легко отвергнуть неправильную гипотезу, однако, для подтверждения правильной гипотезы требуется время и большое количество экспериментов.

## **1.2. Системный подход к моделированию**

Изучаемые объекты, как правило, очень сложны. Для упрощения их изучения удобно разбить их на части, и изучать каждую из частей отдельно. При этом важно учитывать, что части находятся во взаимодействии и не являются независимыми друг от друга. Для правильного описания



поведения взаимодействующих объектов используется системный подход, заключающийся в представлении сложного объекта в виде системы взаимодействующих элементов. При изучении систем, используемых в целенаправленной человеческой деятельности, особое внимание уделяется целенаправленным системам; в дальнейшем речь будет идти о целенаправленных системах.

*системой называется совокупность взаимодействующих элементов, объединенных наличием общей цели.* Элементы системы имеют связи как между собой, так и с внешней средой (объектами, не принадлежащими к системе).

В системе могут быть выделены подсистемы. *Подсистемой называется часть системы, имеющая собственную (локальную) цель, согласованную с целью системы.* Подсистемы, в свою очередь, также могут разбиваться на подсистемы более низкого уровня. На нижнем уровне иерархии находятся элементы. *Элементом называется неделимая часть системы.* Иерархии подсистем соответствует иерархия целей, или *дерево целей* (схема, отражающая иерархию целей, напоминает перевернутое дерево).

Сущность системного подхода к моделированию заключается в единстве процессов декомпозиции и композиции.

*Декомпозицией называется метод, основанный на использовании структуры системы и позволяющий заменить решение одной большой задачи решением*



*нескольких более простых задач.* Декомпозиция системы производится путем последовательного применения структурного и функционального подходов. **Структурный подход** заключается в моделировании структуры системы, т.е. разбиении ее на подсистемы и элементы; **функциональный подход** предполагает построение модели каждого элемента на основе анализа его поведения без использования информации о структуре.

Деление системы на подсистемы не всегда однозначно. При разбиении систем на подсистемы обычно руководствуются принципами:

- У каждой подсистемы должна быть своя локальная цель. Эта цель с одной стороны должна быть автономной, а с другой стороны должна быть согласована с общей целью, т.е. должна быть направлена на выполнение общей цели системы.

- Связи между элементами должны быть, в основном, сконцентрированы внутри подсистем. Это хорошо согласуется с разбиением на подсистемы по функциональным признакам. Например, приемник может быть разбит на УВЧ, преобразователь, УНЧ, эквалайзер и т.п.

**Композицией называется моделирование связей подсистем и элементов между собой и с внешней средой.** Связь между элементами осуществляется через множество параметров, которые для одних элементов являются входными



(влияющими на их функционирование), а для других – выходными (описывающими результат их функционирования). Наибольшую эффективность при решении задачи композиции имеют компьютерные модели, способные хранить в памяти большие массивы информации о параметрах, описывающих связи между элементами.

Таким образом, чтобы построить модель системы, нужно:

- сформулировать цель системы;
- определить, что входит в систему (отделить ее от внешней среды);
- определить структуру системы, т.е. разбить ее на подсистемы и элементы;
- построить дерево целей в соответствии с иерархической структурой системы;
- построить модель каждого элемента;
- построить модель взаимосвязи между элементами.

Большинство систем обладают свойствами, основные из которых следующие.

- Системное единство. Действие подсистем и элементов подчинено общей цели системы.
- Информационность. Элементы и подсистемы связаны между собой информационными связями.
- Нелинейность. Свойства системы не являются суммой свойств входящих в нее элементов.



- Эмергентность (от англ. emergence — возникающий, неожиданно появляющийся) – появление у системы неожиданных свойств, которыми элементы не обладают. Например, совместное подключение емкости и индуктивности к простой электрической цепи приводит к возникновению электрических колебаний, но ни емкость, ни индуктивность, взятые отдельно, колебаний в цепи не вызывают.

- Устойчивость. Правильно организованная система должна быть устойчивой к внешним воздействиям.

### **1.3. Классификация моделей**

#### **1.3.1. Виды моделей**

Одному и тому же объекту можно поставить в соответствие множество различных моделей, которые отличаются друг от друга по различным признакам. Основными видами моделей, используемых в инженерной деятельности, являются материальные (физические), и информационные (символьные) модели.

В качестве материальных моделей используются объекты материального мира. К ним относятся различные макеты, скульптуры, уменьшенные модели самолетов и кораблей, лабораторные установки. Наиболее точной материальной моделью можно считать сам объект, приспособленный для исследования.



Информационные модели представляют собой информацию об объекте, записанную на различных информационных носителях.

### **1.3.2. Физические (материальные) модели**

Физические модели подразделяются на масштабные, подобные и аналоговые.

*Масштабные модели* – это макеты объектов, выполненные в определённом масштабе. Например, макет нового района города, макет самолёта, макет моста. Другой пример: лабораторная установка, как модель промышленного оборудования. Особенностью масштабного моделирования является геометрическое подобие оригинала и модели, т.е. пропорциональность их геометрических размеров.

*Подобные модели* предполагают не только геометрическое подобие, но и пропорциональность других физических величин: параметров материалов, токов и напряжений, времени. В подобных моделях масштабы подобия по различным геометрическим параметрам могут быть разными. Определением условий подобия и возможных масштабов, связывающих параметры оригинала и модели, занимается специальный раздел математического моделирования – теория подобия.

*налоговые модели* используются для моделирования физических объектов объектами, имеющими другую



физическую природу. Аналоговое моделирование основано на том, что физические законы поведения объектов разной физической природы описываются математическими закономерностями одинакового вида. В частности, однотипные математические описания имеют: математический маятник и электрические колебания в колебательном контуре; ток в электрической цепи и движение жидкости по трубопроводам; диффузия атомов примеси при легировании полупроводника и процессы теплообмена. Существуют универсальные аналоговые модели – аналоговые вычислительные машины, позволяющие моделировать объекты различной физической природы, с помощью процессов в электрических цепях.

### **1.3.3. Информационные (символьные) модели**

*Графические модели* предполагают представление информации об объекте в графической форме. К ним относятся рисунки, эскизы, чертежи, схемы, диаграммы, трехмерные компьютерные модели.

*Вербальные (словесно-описательные) модели* представляют собой описание объекта на естественном человеческом языке. Примерами вербальных моделей являются кулинарные рецепты, технологические инструкции, руководства по эксплуатации бытовых приборов.

*Концептуальные модели* – развитие вербальных моделей на основе описания структуры объекта и процессов



преобразования информации. В концептуальных моделях описывается принцип действия приборов и устройств, могут использоваться диаграммы, графики, структурные и функциональные схемы.

Функционально – логические модели предполагают вербальное описание процесса с последующей формализацией с использованием аппарата математической логики. Например, нужно поддержать температуру в заданных пределах. Модель может представлять собой ряд инструкций типа:

*если  $t > 50$  °С, то включить холодильник;*

*если  $t < 40$  °С, то выключить холодильник;*

*если  $t < 20$  °С, то включить нагреватель;*

*если  $t > 30$  °С, то выключить нагреватель.*

Развитием функционально-логического моделирования является ситуационное моделирование, основано на классификации ситуаций. Для различных ситуаций, которые могут возникнуть в процессе управления объектом, определяется определенный алгоритм действий. При возникновении реальной ситуации она относится к определенному классу, после чего вступает в действие алгоритм, определенный для этой ситуации.

**Математические модели** относятся к символьным моделям и представляют собой описание объектов в виде математических символов, формул, выражений. При наличии достаточно точной математической модели можно путем





математических расчетов прогнозировать результаты функционирования объекта при различных условиях, выбрать из множества возможных вариантов тот, который дает наилучшие результаты. При применении математических моделей целесообразно ориентироваться на использование современных компьютеров, позволяющих за короткое время произвести большое количество расчетов на математических моделях достаточно высокой сложности. Расширением математических моделей являются алгоритмические модели, представляющие собой последовательности математических действий, впоследствии реализуемые в виде компьютерных программ.

#### **1.4. Классификация математических моделей**

а) По способу построения модели подразделяются на *аналитические (теоретические), статистические (эмпирические) и комбинированные.*

*Аналитические модели* строятся на основе информации, содержащейся в известных законах природы, например, законах сохранения энергии, массы, импульса, электрического заряда, Ома, Кирхгофа, Архимеда и т.п. Объект, для которого строится аналитическая модель, должен быть хорошо изучен. При этом учет всех законов, описывающих функционирование объекта на практике затруднителен, поскольку приведет к очень высокой сложности модели с множеством различных параметров, значение которых часто не известно. По этому, как правило, при



построении аналитических моделей используются различные допущения и упрощения, снижающие точность моделирования. Основным достоинством аналитических моделей является их универсальность.

*Статистические модели* строятся на основании обработки экспериментальных данных. Объект представляется в виде черного ящика, для которого определяются входные и выходные параметры. Затем проводится ряд экспериментов, при которых фиксируются значения входных и выходных параметров, после чего производится статистическая обработка результатов экспериментов, на основании которой подбирается математическое выражение, описывающее экспериментальные данные с достаточной точностью. Информация о структуре объекта и законах его функционирования при этом не используется. Основным достоинством статистических моделей является простота их построения, основным недостатком – низкая универсальность: модель, построенная по данным эксперимента на какой-либо установке, годится только для этой установки и может быть непригодна для такой же установки, установленной в соседней лаборатории (а тем более для оборудования с другими размерами и параметрами, для других материалов).

Наилучший результат дают *комбинированные модели*, сочетающие достоинства аналитических и статистических моделей. Сначала строится упрощенная аналитическая модель,



которая может содержать как известные, так и не известные параметры. В модель вводятся корректирующие коэффициенты с целью уменьшения систематической погрешности модели. Вначале корректирующие коэффициенты задаются таким образом, чтобы они фактически не изменяли математическую модель. Например, если аналитическое выражение умножается на корректирующий коэффициент, то начальное его значение принимается равным единице. После проведения эксперимента значения неизвестных параметров и корректирующих коэффициентов пересчитываются на основе статистического анализа экспериментальных данных.

б) *Одномерные и многомерные модели* различают по количеству входных переменных, входящих в модель.

в) *Линейные и нелинейные модели.* Для линейных моделей справедлив принцип суперпозиции, согласно которому реакция объекта на суммарное воздействие равна сумме реакций объекта на элементарные воздействия:

$$Y \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) = \sum_{i=1}^N Y_i(x_i). \quad (1.1)$$

г) *Статические и динамические модели.* В динамических моделях переменные зависят от времени, в статических – не зависят. Динамические модели проще статических, и при необходимости они иногда преобразуются в статические.



Например, при напылении тонкопленочных слоев толщина слоя изменяется с течением времени, но если вместо толщины в качестве параметра выбрать скорость роста слоя, то она может быть и неизменной (статическая модель). Статические модели описывают также установившиеся режимы, когда переходные процессы закончились.

#### ***д) Стационарные и нестационарные модели***

Стационарные модели описывают процессы, инвариантные относительно времени начала процесса. Нестационарные модели описывают процессы, течение которых зависит от времени их начала. Реакция стационарной системы на любой заданный тип возмущения зависит только от интервала времени между моментом начала действия входного возмущения и данным моментом времени, т.е. свойство стационарности означает, что процесс преобразования инвариантен относительно сдвига сигналов на входе во времени. Реакция нестационарной системы зависит как от текущего времени, так и от момента приложения входного возмущения. В этом случае при сдвиге воздействия на входе во времени выходные сигналы не только сдвигаются во времени, но и меняют свою форму. Статические модели являются частными случаями стационарных моделей и описывают функционирование системы в установившихся условиях.

***е) Модели с параметрами, сосредоточенными или распределенными в пространстве.***



В моделях с распределенными параметрами переменные зависят от пространственных координат, в моделях с сосредоточенными параметрами – не зависят. Динамические модели с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Динамические модели с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. Например, модель линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами описывается законами Ома и Кирхгофа; модель линейной электрической цепи с распределенными параметрами – уравнениями Максвелла.

ж) *Модели, дискретные и непрерывные* (во времени). В дискретных моделях время принимает фиксированные значения, в непрерывных – любые значения. При использовании дискретных моделей ось времени разбивается на интервалы, границы которых называются опорными моментами времени. Расчет параметров модели производится для опорных моментов времени.

з) *Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели.* Детерминированные модели являются воспроизводимыми: при одинаковых условиях модель всегда дает один и тот же результат. В стохастических моделях некоторые параметры являются случайными величинами, и

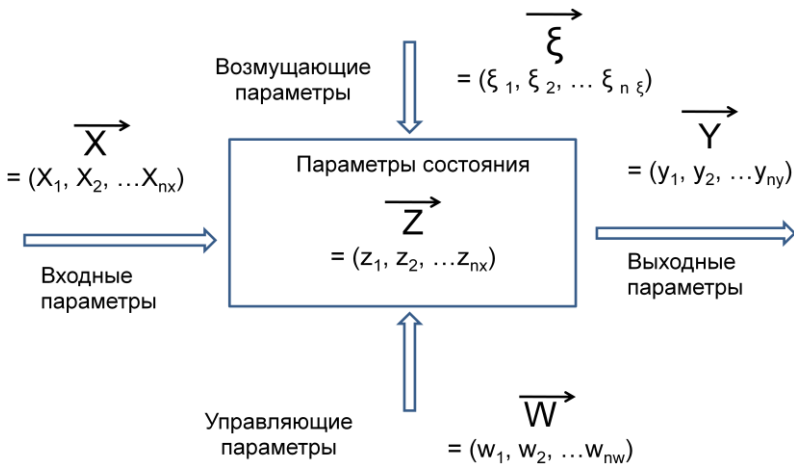


результаты моделирования при каждой реализации отличаются друг от друга.

### 1.5. Взаимодействие объекта моделирования со средой

Схема взаимодействия объекта моделирования со средой изображена на рис. 1.1.

Средой считается все, что не относится к объекту моделирования: внешние воздействия, погодные условия, солнечная активность, поставщики материалов, потребители, экспериментаторы и пр. Взаимодействие объекта моделирования со средой может быть описано рядом параметров, которые можно подразделить на пять классов.



Математическая модель:  $Y = Y(\vec{X}, \vec{W}, \vec{Z})$

Рис. 1.1. Взаимодействие объекта моделирования со средой



**Выходные параметры**  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_{ny})$  отражают результат функционирования объекта, напрямую связанный с его целью. Например, если моделируется процесс изготовления резисторов, то выходными параметрами могут являться сопротивление, температурный коэффициент сопротивления, рабочая мощность. Стрелка над величиной  $Y$  означает, что это вектор, т.е. таких параметров может быть несколько.

**Входные параметры**  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{1nx})$  – это параметры, влияющие на функционирование объекта. Входными являются параметры материалов, окружающей среды, технологические режимы. Важнейшие свойства входных параметров – их наблюдаемость (измеряемость) и существенное влияние на функционирование объекта.

Как правило, входных параметров при моделировании объектов бывает очень много (десятки и даже сотни) Для удобства управления объектом из них выделяются несколько наиболее влияющих, а остальные – фиксируются на заданном уровне. Параметры, выбранные для управления объектом, называются **управляющими** (управляемыми, управлениями, факторами). В данном учебном пособии они будут обозначаться символами  $\vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_{nw})$ . Основными свойствами управляющих параметров являются возможность изменения (управляемость), наблюдаемость (измеряемость) и существенное влияние на функционирование объекта.



**Возмущающие параметры**  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n\xi})$ ,

оказывающие неконтролируемое воздействие на объект и приводящие к шумам, помехам, погрешностям, являются ненаблюдаемыми и неуправляемыми. Каждый из них влияет на объект очень слабо, а их суммарное влияние приводит к возникновению погрешностей, шумов, возмущений и пр. Благодаря влиянию возмущающих параметров, эксперимент становится невоспроизводимым, а его модель – стохастической. Основными свойствами возмущающих параметров являются ненаблюдаемость и неуправляемость.

**Параметры состояния**  $\vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_{nz})$  отражают память объекта о предыстории его функционирования. Примером является триггер со счетным входом, на который приходит импульс. Сигнал на выходе триггера зависит не только от сигнала на входе, но и от его предыдущего состояния, которое в данном случае и является параметром состояния.

Причисление параметра к определенному классу является условным. Например, при необходимости можно начать управлять неуправляемым входным параметром и этим перевести его в класс управляющих. Можно обнаружить, что какой-то возмущающий параметр сильнее других влияет на функционирование объекта, принять меры к его измерению, и этим перевести его в класс входных параметров, и т.п.





Зависимость выходных параметров объекта от других (входных, управляющих, параметров состояния) образуют его математическую модель. При этом возмущающие параметры в модель, как правило, не включаются в силу их ненаблюдаемости, но могут учитываться их статистические характеристики.

В качестве примера рассмотрим математическую модель процесса протекания электрического тока через RL – цепочку:

$$i = \frac{E + V - L \frac{di}{dt}}{R},$$

где  $i$ - ток через RL-цепочку;  $E$ - напряжение источника;  $V$ -случайная погрешность напряжения источника питания;  $R$  и  $L$ -сопротивление и индуктивность элементов. В данном примере  $R$  и  $L$ - входные параметры;  $E$ - управляющий параметр;  $V$ - возмущающий параметр;  $i$ - выходной параметр, одновременно являющийся параметром состояния.

## **1.6. Свойства математических моделей и требования к ним**

При разработке математической модели устанавливается ряд требований к ее свойствам, выполнение которых необходимо для ее эффективного использования. Рассмотрим основные из них.



**Целенаправленность модели.** В модели должны фигурировать параметры, описывающие цель объекта, а так же параметры, с помощью управления которыми можно добиться достижения цели.

**Точность модели** определяется величинами погрешности, с которыми рассчитываются выходные параметры. Погрешности подразделяются на систематические и случайные. Систематическая погрешность  $\Delta$  характеризует среднее отклонение между вычисленными и экспериментальными значениями выходного параметра, а случайная (среднеквадратичная) погрешность  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение экспериментальных значений от вычисленных:

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i^*) \quad (1.2.)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i^*)^2} \quad (1.3.)$$

где  $n$  – число экспериментов;

$\hat{Y}_i$  – значение выходного параметра в  $i$ -ом эксперименте, вычисленное из математической модели;

$Y_i^*$  – ‘экспериментальное значение выходного параметра в  $i$ -ом эксперименте.



**Непротиворечивость модели** характеризует отсутствие абсурдных ответов и выводов при использовании модели. При этом обычно рассматриваются крайние случаи (метод доведения до абсурда). Что произойдет, если какая-то переменная примет нулевое (отрицательное, бесконечно большое) значение? Модель проверяется также на противоречия между выводами, которые можно сделать из модели и из экспериментальных данных.

Для иллюстрации свойства непротиворечивости рассмотрим два примера.

**Пример 1.** На рисунке 1.2 точками изображены экспериментальные данные, сплошными кривыми – графики функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , построенные по двум математическим моделям. Из экспериментальных данных следует, что при увеличении параметра  $X$  величина  $Y$  увеличивается; то же самое следует из модели  $y_1(x)$ . Из модели  $y_2(x)$  следует, что при увеличении  $X$  величина  $Y$  уменьшается, что противоречит экспериментальным данным. Модель  $y_1(x)$  является непротиворечивой (хотя и содержащей существенную систематическую погрешность), а модель  $y_2(x)$  – противоречивой.

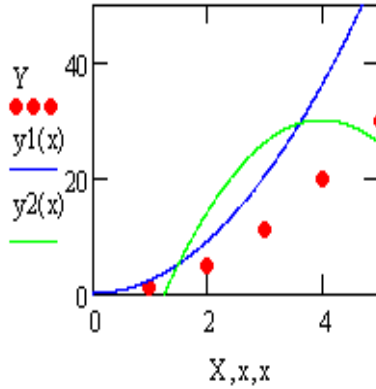


Рис. 1.2. Непротиворечивость модели

**Пример 2.** Имеется партия резисторов с номинальным сопротивлением  $R_0 = 5 \text{ Ом}$  и среднеквадратичной погрешностью  $\sigma$ . Резисторы поочередно подключаются к источнику напряжения (рис. 1.3).

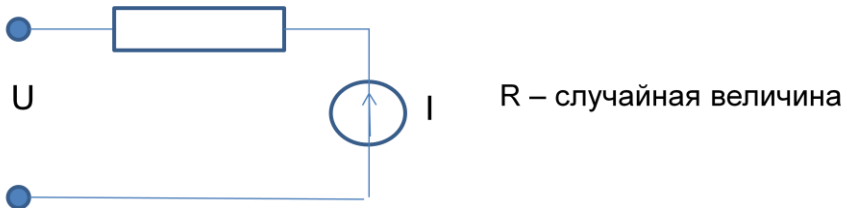


Рис. 1.3. Схема для измерения силы тока.

Нужно оценить силу тока в цепи, учитывая возможную погрешность сопротивления резисторов.

**Типовое решение.** При производстве резисторов на их сопротивление влияет большое количество возмущающих факторов. Количество факторов велико, а влияние каждого



фактора мало, в связи с чем в силу центральной предельной теоремы можно считать, что сопротивление резисторов является случайной величиной с нормальным законом распределения:

$$f(R) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(R-R_0)^2}{2\sigma^2}}$$

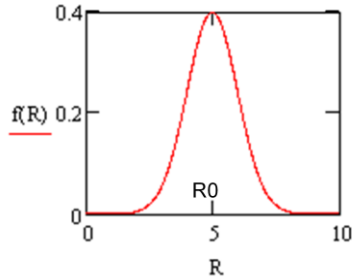


Рис. 1.4. Нормальный закон распределения сопротивления в партии резисторов

Сила тока в цепи также является случайной величиной, вычисляемой по закону Ома, исходя из заданного напряжения и случайного сопротивления:  $I = \frac{U}{R}$  . (1.4)

Для оценки непротиворечивости модели оценим среднее значение силы тока в цепи. Для этого вычислим его математическое ожидание, определяемое из теоремы о математическом ожидании функции случайной величины:

$$M(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U}{R} f(r) dR \quad (1.5)$$

Анализ интеграла (1.5) показывает, что он расходится при любых значениях параметров распределения, т.е. оценка среднего значения тока в цепи бесконечно велика. Однако



эксперимент показывает иное: при подключении резисторов к цепи сила тока в ней никогда не достигает бесконечного (и даже просто очень большого) значения. Причина расхождения интеграла в противоречивости математической модели, приводящей к абсурдным результатам. Дело в том, что в соответствии с нормальным законом распределения величина  $R$  может принимать (с малыми вероятностями) нулевые и даже отрицательные значения (что на практике, конечно, не наблюдается), и этого оказывается достаточно для полного искажения результатов моделирования. В данном случае, для повышения устойчивости модели можно воспользоваться не нормальным, а усеченным нормальным распределением (с «обрезанными хвостами»). При этом границы усечения нужно выбрать так, чтобы точка 0 находилась за границей. Например, ограничиться областью  $R_0 \mp 3\sigma$ :

$$\varphi(R) = \begin{cases} \frac{f(R)}{\int_{R_0-3\sigma}^{R_0+3\sigma} f(R)dR} & \text{при } R_0-3\sigma < R < R_0+3\sigma; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.6)$$

**Реалистичность модели** оценивается путем также расчета типовых примеров, для которых заранее известен результат (точный или ориентировочный). Например, если тепловой расчет печатного узла дает в результате температуру микросхемы  $1500^\circ\text{C}$ , то модель не реалистична.



*Устойчивостью модели* называется слабая чувствительность к погрешностям ее параметров. Неустойчивость модели является ее свойством и не всегда свидетельствует о неустойчивости описываемых ею объектов.

Рассмотрим пример неустойчивой модели.

Модель представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 4 X_2 = 8 \longrightarrow \text{решение:} \longrightarrow X_1 = 4 \\ 12 X_1 + 49 X_2 = 97 \qquad \qquad \qquad X_2 = 1 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Допустим, что коэффициенты при переменных определены из эксперимента с небольшими погрешностями, которые влияют на результат решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 4,05 X_2 = 8 \longrightarrow \text{решение:} \longrightarrow X_1 = -1,419 \\ 12 X_1 + 49,03 X_2 = 97 \qquad \qquad \qquad X_2 = 2,326 \end{array} \right.$$

Из примера видно, что погрешности исходных данных в несколько процентов (типичная погрешность для экспериментальных данных) привела к существенному искажению результатов.

Причиной неустойчивости системы является близость уравнений, образующих систему, к линейно зависимым. Вследствие этого матрица, составленная из коэффициентов системы, является плохо обусловленной. Для построения



устойчивой модели умножим обе части первого уравнения системы (1.7) на 11:

$$11X_1 + 44 X_2 = 88.$$

Вычтем это уравнение из второго уравнения системы (1.7) и включим полученное уравнение в систему вместо второго:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 4 X_2 = 8 \longrightarrow \text{решение:} \longrightarrow X_1 = 4 \\ X_1 + 5 X_2 = 9 \qquad \qquad \qquad X_2 = 1 \end{array} \right.$$

Получившаяся в результате модель является устойчивой к погрешностям коэффициентов системы.

**Удобство использования** является одним из основных свойств математических моделей, что обусловлено самим методом моделирования (см. 1.1). Это требование, в частности, должно предусматривать удобство реализации в виде компьютерных программ.

**Универсальность модели** обеспечивает описание с помощью нее как можно более широкий класс объектов. Требование универсальности особенно важно в моделях, предназначенных для проектирования, т.к. они должны описывать еще не существующие объекты с заранее не известными (а лишь предполагаемыми) свойствами.

**Адаптивность и возможность изменения.** Модели, обладающие этими свойствами можно корректировать при изменении окружающих условий и совершенствовать для





улучшения ее свойств. Простейшим приемом обеспечения адаптивности модели является введение в нее корректирующих коэффициентов, значения которых можно изменять и уточнять по мере ее использования.

***Экономичность, простота, физический смысл.***

Требование экономичности модели подразумевает минимизацию затрат на ее разработку и реализацию (в частности, время, необходимое для компьютерных расчетов). Наличие физического смысла полезно для изучения модели с целью избежания возможных ошибок. Принцип простоты заключается в том, что из нескольких моделей с одинаковыми другими свойствами нужно выбрать наиболее простую. При этом для разных целей можно использовать разные модели одного и того же объекта. Например, для проектирования используют сложные аналитические модели, обладающие высокой универсальностью и учитывающие большое число параметров; для управления объектами в реальном масштабе времени используются простые статистические модели, содержащие только управляющие параметры и просчитываемые на управляющих компьютерах за доли секунды.

***Адекватность математической модели*** является ее интегральным свойством, объединяющим другие наиболее важные свойства. Если свойства модели удовлетворяют требованиям, говорят, что она адекватна (оригиналу), в противном случае – не адекватна.



## 1.7. Разработка математических моделей

Разработка математической модели состоит из ряда этапов.

1. Уяснение и формулировка целей. На этом этапе нужно сформулировать требования к модели и определить ее выходные параметры.

2. Определение необходимых свойств модели, исходя из классификации (линейная или нелинейная, статическая или динамическая и т.п.).

3. Определение параметров, входящих в модель (входные, управляющие, состояния).

4. Представление объекта в виде системы. Составление структурной схемы модели и дерева целей.

5. Определение параметров для каждой подсистемы и каждого элемента.

6. Разработка математических моделей каждого элемента, устанавливающих связь между их параметрами.

7. Оценка устойчивости, непротиворечивости и реалистичности моделей элементов.

8. Экспериментальная проверка моделей элементов, оценка их адекватности.

9. Разработка модели системы на основе моделей элементов и с учетом взаимосвязи их параметров.

10. Оценка адекватности модели системы.



Порядок разработки математической модели является итерационным: с любого этапа при необходимости можно вернуться на любой из предыдущих этапов с целью внесения улучшений, уточнений и упрощений.

Упростить модель можно, выполнив одну из следующих операций:

- превратить некоторую переменную величину в постоянную;
- превратить динамическую модель в статическую, введя в модель вместо переменных, зависящих от времени, их производные;
- исключить или объединить некоторые переменные;
- ввести более жесткие ограничения и предположения;
- предположить, что модель является линейной, стационарной, детерминированной, с сосредоточенными параметрами.

### **1.8. Применение математических моделей**

В инженерной деятельности математические модели используются для:

- получения новых знаний об объекте путем исследования модели;
- проектирования (создания новых или улучшения старых) объектов;
- диагностики неисправностей,



- решения задач о взаимодействии объекта с другими объектами.

Все задачи, основанные на использовании математических моделей, можно разбить на две разновидности: задачи анализа и задачи синтеза. Задачи анализа служат для прогнозирования поведения и свойств объекта в различных условиях. Задачи синтеза заключаются в определении условий, при которых объект обладает заданными свойствами или ведет себя заданным образом. Задачи анализа и синтеза могут решаться как аналитически, так и численными методами, с использованием компьютеров.

### **1.9. Вычислительный эксперимент**

Вычислительным экспериментом называется имитация натурального эксперимента на компьютере с использованием математической модели.

Имея адекватную математическую модель объекта, можно просчитать большое количество вариантов поведения объекта в различных ситуациях. По сравнению с натурным экспериментом, вычислительный эксперимент имеет ряд достоинств.

1. Малая стоимость по сравнению с натурным экспериментом.
2. Небольшое время, затрачиваемое на его проведение.

Благодаря этому за короткое время можно поставить большое количество экспериментов.



3. Возможность проведения эксперимента для труднодоступных объектов (например, на поверхности солнца или внутри ядерного реактора).
4. Возможность проведение эксперимента в достаточно широком диапазоне значений параметров объектов, которые не реализуются на натуральных установках.
5. Возможность управлять детальностью анализа объекта, что особенно важно при малых размерах области протекания процессов и их малой длительности.
6. В случае зависимости физического процесса от большого числа параметров возможно рассмотрение влияния каждого из параметров в отдельности.
7. Возможность измерения труднодоступных внутренних параметров объектов.

Недостатком вычислительного эксперимента является зависимость его достоверности от адекватности используемой математической модели, в связи с чем модель, используемая для вычислительного эксперимента, должна проходить тщательную проверку на адекватность.

Разновидностями вычислительного эксперимента являются:

**Прогнозирование поведения объекта.** Анализ результатов многовариантного прогнозирования позволяет лучше изучить объект с разных сторон и получить информацию о взаимной



зависимости его параметров, свойств и поведения в различных условиях.

**Метод Монте-Карло** (метод статистических испытаний), основанный на моделировании случайных воздействий на объект с помощью генераторов псевдослучайных чисел. Стохастический объект многократно моделируется при различных значениях случайных параметров; затем результаты усредняются и рассчитываются их статистические характеристики.

**имитационное моделирование** – имитация развития динамического процесса во времени. Значения всех переменных рассчитываются для последовательных дискретных моментов времени. При этом часто для моделирования случайных воздействий используется метод Монте-Карло. Метод особенно эффективен при моделировании сложных систем. Элементы системы моделируются последовательно для короткого промежутка времени, затем производится обмен сигналами (параметрами) между ними. В результате возникает иллюзия, что все элементы моделируются параллельно.

**Поисковые методы оптимизации** – поиск наилучших решений путем просчета большого числа вариантов при целенаправленном изменении параметров объекта. При использовании поисковых методов оптимизации синтез



наилучшего решения производится путем многовариантного анализа с последующим выбором наилучшего результата.

### **1.10. Тест для самопроверки.**

В каждом задании нужно выбрать один вариант ответа.  
Уровень зачета – не менее трех правильных ответов.

1. Элементом системы называется

- а) часть системы, имеющая локальную цель;
- б) неделимая часть системы;
- в) часть системы, описываемая элементарным математическим действием;
- г) подсистема, в состав которой не входят другие подсистемы.

2) Объект-заместитель \_\_\_\_\_ объекта-оригинала, предназначенный для получения информации об оригинале, называется

- а) моделью;
- б) макетом;
- в) аналогом;
- г) заглушкой.

3) Аналоговые модели основаны на

- а) сходстве математических описаний объекта и модели;
- б) одинаковой физической природе процессов в объекте и в модели;



в) использовании аналоговых интегральных микросхем;  
г) моделировании динамики протекания процесса во времени.

4) Свойство модели, заключающееся в слабой чувствительности результата к изменениям ее параметров, называется

- а) непротиворечивостью;
- б) реалистичностью;
- в) точностью;
- г) устойчивостью.

5) Моделью с сосредоточенными параметрами называется

- а) модель, параметры которой сосредоточены внутри черного ящика;
- б) модель, построенная без использования параметров состояния;
- в) модель, параметры которой не зависят от пространственных координат;
- г) модель, имеющая один входной и один выходной параметр.

Правильные ответы: а – 5, б – 4, в – 3, г – 2, д – 1





## Литература

1. Блинов Ю.Ф., Иванцов в.В., Серба П.В. Методические указания к изучению курса «Математическое моделирование физико-химических и социально-экономических процессов». Ч.1. № 240. Таганрог, ТРТИ им. В.Д. Калмыкова, 1989.

2. Анищенко Л.М., Лавренюк С.Ю. Математические основы проектирования высокотемпературных технологических процессов. М: Наука, 1986. – 78 с.



## Сведения об авторах

### **Блинов Юрий Федорович**

к.т.н., доцент кафедры Технологии микро- и нанoeлектронной аппаратуры Технологического института Южного федерального университета в городе Таганроге.



### **Иванцов Виктор Викторович**

к.т.н., доцент кафедры Технологии микро- и нанoeлектронной аппаратуры Технологического института Южного федерального университета в городе Таганроге.



### **Серба Павел Викторович**

д.ф.-м.н., профессор кафедры Технологии микро- и нанoeлектронной аппаратуры Технологического института Южного федерального университета в городе Таганроге.

